Date le prime tre righe della successione, come possiamo fare per trovare il termine successivo?

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$
$$\dots$$

Procediamo come segue:
indichiamo con x il primo termine della successione
e facciamo i calcoli in un modo rapido.

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2 = (x+5)^2 + (x+6)^2 + (x+7)^2 + (x+8)^2$$
$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2 = (x+1+4)^2 + (x+2+4)^2 + (x+3+4)^2 + (x+4+4)^2$$

$$x^2 + \cancel{(x+1)^2} + \cancel{(x+2)^2}+\cancel{(x+3)^2}+\cancel{(x+4)^2} =$$

$$= \cancel{(x+1)^2} + 4^2 + 2*4*(x+1) + \cancel{(x+2)^2}+4^2 + 2*4*(x+2) + \cancel{(x+3)^2}+4^2 + 2*4*(x+3) + +\cancel{(x+4)^2} + +4^2 + 2*4*(x+4)$$

Ora facciamo semplicemente i calcoli

$$x^2 = 4*4^2 + 2*4*(x+1+x+2+x+3+x+4)$$
$$x^2 = 64 + 2*4*(4x + 10)$$
$$x^2 - 32x - 144 = 0$$
$$x = 36 \quad oppure \quad x=-4$$

Solo la soluzione positiva è quella che ci interessa

SOLUZIONE
x=36

Quindi la serie procede come segue

$$36^2+37^2+38^2+39^2+ 40^2 = 41^2+42^2+43^2 + 44^2$$

Osserviamo che i primi termini sono 3, 10, 21 e il successivo è 36

10-3=7 21-10=11 36-21=15

7, 7+4=11, 11+4=15, il prossimo primo numero si otterrà aggiungendo 15+4 = 19 a 36? Il prossimo numero sarà 55? E il successivo sarà 55+23 = 78?

Cioè $x_n = x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) + 4$. Provate!

<u>Ora però vediamo come fare per trovare una formula generale, senza dover fare i calcoli ogni volta e ogni volta non sapere se ci sarà oppure no una soluzione.</u>

$$x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n-1)^2 + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + \ldots + (x+2n)^2$$

n è il numero di elementi del secondo membro dell'uguaglianza:
per ogni numero naturale ***n > 0*** esiste un numero naturale ***x*** tale che sia verificata l'uguaglianza scritta sopra?

<u>Si trova una e una sola soluzione per qualunque valore di *n > 0*</u>

SOLUZIONE

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 \ldots + (x+n)^2 = ((x+1)+n)^2 + ((x+2)+n)^2 \ldots + ((x+n)+n)^2$$

Tutti i termini del primo membro, escluso ***x²***, vengono eliminati con i quadrati del primo termine dei quadrati del secondo membro.

Rimane

$$x^2 = n^2 + 2n(x+1) + n^2 + 2n(x+2) .. + n^2 + 2n(x+n)$$
$$x^2 = n^2 + n^2 + .. + n^2 + 2n(x+1+x+2+\ldots+x+n)$$

$$\underbrace{n^2 + n^2 + \ldots + n^2}_{n \ volte} = n \bullet n^2 = n^3$$

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \ volte} = nx$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(1+n)}{2}$$

$$2n(x+1+x+2+x+3+\ldots+x+n) = 2n(nx + \frac{n(1+n)}{2})$$

Alla fine ottengo

$$x^2 = n^3 + 2n^2x + 2n\frac{n(n+1)}{2}$$

$$x^2 - 2n^2x + 2n^3 + n^2 = 0$$

$$x^2 - 2n^2x - n^2(2n+1) = 0$$

Due soluzioni: ***x=-n*** non ci interessa perché ***x*** non è un numero naturale, ma un intero negativo.

<u>La soluzione interessante è</u>

x= n(2n+1)

N.B.

Se accettassimo anche la soluzione ***x=-n*** si otterrebbe la seguente successione:

$$(-1)^2 + (-1+1)^2 = (-1+2)^2$$
$$(-2)^2 + (-2+1)^2 + (-2+2)^2 = (-2+3)^2 + (-2+4)^2$$
$$(-3)^2 + (-3+1)^2 + (-3+2)^2 + (-3+3)^2 = (-3+4)^2 + (-3+5)^2 + (-3+6)^2$$

...

Una successione piuttosto banale …

UN MODO DI TROVARE LA SERIE SUCCESSIVA UTILIZZANDO IL PRIMO TERMINE DELLE DUE SERIE PRECEDENTI È IL SEGUENTE:

$$x_n = x_{n-1} + (x_{n-1} - x_{n-2}) + 4 \qquad (1)$$

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 4 \qquad (1\text{bis})$$

È una formula che funziona per qualunque naturale ***n>0***?

DIMOSTRAZIONE

Partendo dalla formula trovata precedentemente e cioè

$$x_n = n(2n+1)$$

dimostro che sostituendo tale formula nel secondo membro della (1bis) si trova nuovamente che

$$x_n = n(2n+1)$$

e questo sta a significare che tale formula coincide con quella trovata in funzione di n.

Tenendo presente che

$$x_{n-1} = (n-1)(2(n-1)+1)$$
$$x_{n-2} = (n-2)(2(n-2)+1)$$

Sostituisco in (1bis)

$$2x_{n-1} - x_{n-2} + 4 = 2(n-1)(2(n-1)+1) - (n-2)(2(n-2)+1) + 4$$

Facendo i calcoli

$$2x_{n-1} - x_{n-2} + 4 = 2(n-1)(2n-1) - (n-2)(2n-3) + 4 = 2(2n^2 - 2n - n + 1) - (2n^2 - 4n - 3n + 6) + 4$$
$$2x_{n-1} - x_{n-2} + 4 = 2n^2 - 6n + 7n = 2n^2 + n = n(2n+1)$$

ottengo

$$2x_{n-1} - x_{n-2} + 4 = n(2n+1) \qquad (2)$$

Ho quindi dimostrato che è vera la (1) dato che è vera la (2) e per concludere posso scrivere

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 4 = n(2n+1)$$